

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 99**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
- 5p** 2. Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.
- 5p** 4. Câte funcții $f : \{1, 2, 3, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1\}$ au proprietatea că $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) = 2$?
- 5p** 5. Se consideră punctele $M(1, 2)$, $N(2, 5)$ și $P(3, m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.
- 5p** 6. Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 99**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(AA^t + xB)$.

5p a) Să se calculeze AA^t .

5p b) Să se arate că $f(0) \geq 0$.

5p c) Să se arate că există $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = mx + n$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G = \{\cos q\pi + i \sin q\pi \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

5p a) Să se arate că $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.

5p b) Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p c) Să se arate că polinomul $f = X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G .

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$.

5p a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^x t^n \ln t \, dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $f_1(e)$.

5p b) Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$.