

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 97**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.
- 5p** 2. Să se arate că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x = \cos x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_5^3 - 4C_6^2$.
- 5p** 5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A, B, C astfel încât $A(1, 3), B(2, 5)$ și $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
Să se determine coordonatele punctului C .
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi care are $BC = 8$ și $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se arate că $\det(A \cdot A^t) \geq 0$.

5p b) Să se arate că, dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, atunci $(a - d)(b - c) = 0$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $(A - A^t)^{2009} = A - A^t$, atunci $|b - c| \in \{0, 1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

5p a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$.

5p b) Să se arate că polinomul $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p c) Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$.

5p c) Să se rezolve inecuația $f(x) < x - \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2) f(x) dx$.

5p b) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x t^4 f(t) dt$ este strict crescătoare.

5p c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x) dx < \frac{1}{4}$.