

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 95**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \frac{1}{|1+x|} = 1$.
- 5p 3. Să se studieze monotonia funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2009^x + \log_{2009} x$.
- 5p 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?
- 5p 5. Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+1)\vec{i} + a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a .
- 5p 6. Să se arate că $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (1 + 2\cos 2x) \cdot \sin 3x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 și restul elementelor egale cu 1.

5p a) Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3 + xI_3) = 0$.

5p c) Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ și restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se determine a, b, c pentru care $x_1 = 2$ și $x_2 = 1 + i$.

5p b) Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X - 1)^2$ și la $(X - 2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a, b, c .

5p c) Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale și a, b, c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

1. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se arate că $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2+2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} \right)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n \geq 2$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.