

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 94**<http://www.pro-matematica.ro>**5p**

1. Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5} \right)^4$.

5p

2. Să se arate că funcția $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{-x} = 2$.

5p

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p

5. Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p

6. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 94<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că A este matrice inversabilă.

5p b) Să se demonstreze că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - b^n & a^n - b^n \\ 0 & b^n & b^n - c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze A^{-1} .

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$ și $f(0) = 0$.

5p a) Să se determine $f(-1)$.

5p b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X - 5$.

5p c) Să se demonstreze că $f = X$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 94<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcțiile $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p

a) Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p

b) Să se arate că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n .

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul b).

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.

5p

a) Să se calculeze I_1 .

5p

b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.