

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 92**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d - a = 7$ și $c - b = 2$, să se determine rația progresiei.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale nenule ale lui m știind că $mx^2 + x - 2 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $(0, 5)$ ecuația $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul $n = C_{10}^0 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8$.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 1)\vec{i} - (2a + 2)\vec{j}$ și $\vec{v} = (a + 1)\vec{i} - \vec{j}$ sunt perpendiculari.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AXA^t = O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A .

5p a) Să se arate că dacă $X, Y \in G$, atunci $X + Y \in G$.

5p b) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci suma elementelor lui X este egală cu 0.

5p c) Să se arate că dacă $X \in G$ și $\det X = 0$, atunci $X^n \in G$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 18X^2 - 30X + 25 \in \mathbb{C}[X]$.

5p a) Să se arate că polinomul f se divide cu $X^2 - 2X + 5$.

5p b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p c) Să se arate că rădăcinile polinomului f au același modul.

1. Se consideră funcția $f : (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$.

5p a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = e$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se demonstreze că funcția f este concavă.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x) dx$.