

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 91**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \left(\sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2} + 1) \right)^2$.
- 5p** 2. Să se determine numerele reale x și y știind că $x + 2y = 1$ și $x^2 - 6y^2 = 1$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ nu este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{10}^3 - C_9^3$.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un paralelogram. Știind că vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ au același modul, să se arate că $ABCD$ este dreptunghi.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 40^\circ \cdot \sin 140^\circ = \cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 91**

<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ știind că $A^2 = 5A$.

5p b) Pentru $x = 2$ să se calculeze A^{2009} .

5p c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\text{rang}(A + A^t) = 1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = 2X^4 + 2(a-1)X^3 + (a^2 + 3)X^2 + bX + c$.

5p a) Să se determine a, b, c , știind că $a = b = c$, iar restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 10.

5p b) Știind că $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f , să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

5p c) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ și rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p a) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x F(x) dx$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.