

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 90**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1 .
- 5p** 2. Să se determine toate perechile (a, b) de numere reale pentru care $a^2 + b^2 = a + b = 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x + \lg(9 - 2x) = 1$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să **nu** fie divizibil cu 7.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(1, -1)$ și $C(5, 1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful A , perpendiculară pe dreapta BC .
- 5p** 6. Să se arate că $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 90**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie M mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p a) Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

5p b) Să se arate că orice matrice din M este neinvertibilă.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $A \in M$, atunci $A^2 \in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p a) Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

5p b) Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}$.

5p c) Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

1. Se consideră funcțiile $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcției f_1 .

5p b) Să se demonstreze că funcțiile $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p c) Admitem că ecuația $f_n(x) = 2^n$ are soluția unică x_n . Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a \in [0, 1]$ și $I_n = \int_0^a \frac{t^n}{t+1} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se demonstreze că $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}$, $\forall n \geq 2$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.