

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 9**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x pentru care $1 + 3 + 5 + \dots + x = 225$.
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = x^2 + mx - 2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2^{-x+1} + 1) = x$.
- 5p** 4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$
- 5p** 5. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ = \frac{91}{2}$

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 9**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trei puncte din plan și matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuație $y = 2x$, atunci $\det(M) = 0$.

5p b) Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic și are catetele de lungime 1, atunci $\det(M) = \pm 1$.

5p c) Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p a) Să se arate că, dacă $X \in A$ și $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.

5p b) Să se arate că, dacă $X \in A, Y \in A$ și $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.

5p c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

5p a) Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p b) Admitem că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ ecuația $f(x) = n$ are o soluție unică x_n . Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$, unde șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost definit la b).

2. Fie funcțiile $f, g_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x)) dx$.

5p b) Să se arate că $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$.