

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 89**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z + 3i = 6 \cdot \bar{z}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.
- 5p** 3. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1 + 4x^2}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 6, 7, 8\}$.
- 5p** 5. Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
- 5p** 6. Fie a și b numere reale, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b - \sin(a - b) = 0$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 89**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se arate că, pentru orice valori ale lui a și b , sistemul este compatibil.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1, x_2, x_3, x_4) cu proprietatea că x_1, x_2, x_3, x_4 și $x_1 + x_2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p c) Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a + b < 1$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p a) Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

5p b) Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p c) Să se calculeze $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 89<http://www.pro-matematica.ro>

1. Pentru fiecare $a > 0$ se consideră funcția $f_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x + a) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

5p a) Să se calculeze $f'_a(x)$, $x > 0$.

5p b) Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.