

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se ordoneze crescător numerele $a = \lg 2 - \lg 20$, $b = C_3^2 - C_4^2$ și $c = -\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$.
- 5p 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y = x^2 + 2x + a$ la axa Ox este egală cu 1.
- 5p 3. Numerele reale x și y verifică egalitatea $\arctg x + \arctg y = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $x \cdot y = 1$.
- 5p 4. Să se arate că numărul A_n^3 , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ este divizibil cu 3.
- 5p 5. Punctele E, F, G, H sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CA}$.
- 5p 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ și $\sin 2x = -\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 88**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matrice A să fie inversabilă.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1} = A^*$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ și polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3$, $f = X^3 - X$, $g = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$.

5p a) Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f .

5p b) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^3}$.

5p c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5p c) Să se demonstreze că $I_{2n} + 2n(2n - 1)I_{2n-2} = 2n \sin 1 - \cos 1$, $\forall n \geq 2$.