

SUBIECTUL I (30p)

Varianta 87

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1 + z + z^2$.
- 5p** 2. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2 + x - 6 \leq 0$.
- 5p** 3. Fie funcția $f : (1, \infty) \rightarrow (2, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$. Să se arate că funcția f este bijectivă.
- 5p** 4. Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{v}_1 = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are laturile $AB = 3$, $BC = 5$ și $AC = 7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC .

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p a) Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.

5p b) Să se calculeze $\det(I_3 + A^3)$.

5p c) Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB = BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană ale lui B este aceeași.

2. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p a) Să se arate că $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p b) Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p c) Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p b) Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că $f(x+1) - f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{3-x}$ și $g(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$, $\forall x \in (0, 3)$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e (3-x) f(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 g(x) dx$.

5p c) Să se arate că $\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 g(x) dx = +\infty$.