

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 86**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i}$ este real.
- 5p** 2. Numere reale a și b au suma 5 și produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 5p** 4. Câte elemente ale mulțimii $A = \left\{x \mid x = C_7^k, k \in \mathbb{N}, k \leq 7\right\}$ sunt divizibile cu 7?
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3$ și $AD = 6$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
- 5p** 6. Să se calculeze suma $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 86**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2y + (a^2 + b^2)z = a^2 + b^2 \\ x + a^3y + (a^3 + b^3)z = a^3 + b^3 \end{cases}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p c) Să se arate că, pentru orice valori reale ale parametrilor a și b sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

5p a) Să se determine gradul polinomului f^2 .

5p b) Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

5p c) Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

5p a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} f(2) f(3) \dots f(n) \right)^{n^2}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}, \forall n \geq 3$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \, dx$.