

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 85**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că numărul $i(z - \bar{z})$ este real.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m+1)x + m$ este tangentă la axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = 5 - x$.
- 5p** 4. Câți termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = \frac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b = 0$.

1. Fie A matricea coeficienților sistemului
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluții nenule.

5p c) Să se arate că, dacă $m = 0$, atunci expresia $\frac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + aX + b$, care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4 .

5p a) Să se determine a și b știind că f are rădăcina i .

5p b) Să se calculeze $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$.

5p c) Să se determine valorile reale ale numerelor a și b știind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

5p a) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

5p b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} t dt, n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent la 0.