

SUBIECTUL I (30p)

Varianta 84

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p 1. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z + 3\bar{z} \in \mathbb{R}$, atunci $z \in \mathbb{R}$.
- 5p 2. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0, 4)$, $(1, -2)$ și $(-1, 1)$.
- 5p 3. Se se arate că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (1, 3)$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.
- 5p 4. Să se determine numerele naturale n , $n \geq 5$, astfel încât $C_n^3 = C_n^5$.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.
- 5p 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = m \\ nx + y - 2z = 4 \end{cases}, \text{ unde } m, n \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se determine m și n pentru care sistemul admite soluția $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 1$.

5p b) Să se determine $n \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p c) Să se determine m și n pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulțimea
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

5p a) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii G .

5p b) Să se arate că G este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p c) Să se arate că $X^3 = I_3$, oricare ar fi $X \in G$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x}$.

5p a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (f(n) - f(n+1))$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x e^{-t} (t^2 - 3t + 2) dt$.

5p a) Să se arate că $f(1) > 0$.

5p b) Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2}$.