

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 83**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $(\sqrt{2}, \log_2 5)$.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2 + 3x + m \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.
- 5p** 4. Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = m\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt perpendiculari.
- 5p** 6. Să se arate că $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 83**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m^2 - m - 1)y + (m + 1)z = 2 \\ 2x + (m^2 - m - 2)y + 2(m + 1)z = 3 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5p b) Să se arate că pentru $m \in \{0, 1\}$ sistemul este incompatibil.

5p c) Să se arate că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$.

2. Se consideră mulțimile $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ și $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$.

5p a) Să se determine elementele mulțimii H .

5p b) Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.

5p c) Să se arate că G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sqrt{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$.

5p a) Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

5p b) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p c) Să se studieze derivabilitatea funcției f .

2. Se consideră funcțiile $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x + \sin^n x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f_1(x)} dx$.

5p b) Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4 , atunci $F''(x) = (f_4(x))^2 \sin 4x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5p c) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x f_1(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f_1(x) dx = \frac{\pi-1}{4}$.