

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 82**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4 + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 9$ se află pe dreapta de ecuație $x + y = 7$.
- 5p** 3. Fie $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1) + f(2) + f(3) = 15$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(1, 0)$, $B(2, 3)$ și $C(-1, 4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a = \frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali
$$\begin{cases} x + ay + (b + c)z = 0 \\ x + by + (c + a)z = 0 \\ x + cy + (a + b)z = 0 \end{cases}$$

5p a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p b) Să se arate că, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$, sistemul admite soluții nenule.

5p c) Să se rezolve sistemul, știind că $a \neq b$ și că $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$.

5p a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

5p c) Să se arate că funcția $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$ cu $f(x + iy) = \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 82<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 0}$, definit prin $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se arate că $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.

5p b) Să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$.

2. Fie funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t) \sin t}{\cos^2 t} dt$.

5p a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5p b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare.

5p c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x^2}$.