

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 81**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.
- 5p** 2. Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2 . Știind că $|x_1 - x_2| = 1$, să se determine m .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} = 1+x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \dots + C_{16}^{16}$.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $x + y = 1$ și $3x - ay = 2$ sunt paralele.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a + \sin 2b = 2 \cos(a - b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și punctele $A(m, 1)$, $B(1-m, 2)$, $C(2m+1, 2m+1)$. Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se calculeze $\det(M)$.

5p b) Să se arate că punctele A, B, C sunt necoliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p a) Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul $\hat{0}$.

5p b) Să se arate că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p b) Să se calculeze $f(1)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^5}$.