

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 80**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\dots(1-i^{2009})$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Să se arate că funcția $f \circ g$ este descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{2-x^2} \geq 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) \neq 1$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4, -1)$ și este paralelă cu dreapta $x - 2y + 1 = 0$.
- 5p** 6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x = \frac{1}{2} + \cos x$. Să se calculeze $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30p) **Varianta 80**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ și mulțimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

5p a) Să se determine numărul inversiunilor lui σ .

5p b) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .

5p c) Fie $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2 = \sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma = \sigma\tau$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și mulțimea $H = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

5p a) Să se arate că, dacă $T \in H$, atunci $-T \in H$.

5p b) Să se demonstreze că H este subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

5p c) Să se determine mulțimea H pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5p

a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p

b) Să se arate că $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p

c) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$.

5p

a) Să se calculeze I_1 .

5p

b) Să se arate că $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.