

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1, 2)$ și $B(0, 3)$ aparțin graficului funcției f , să se determine numerele reale a și c .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.
- 5p** 4. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?
- 5p** 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A , F și C sunt coliniare.
- 5p** 6. Fie triunghiul ABC . Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB = 13$, $AC = 14$ și $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 8**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se arate că $A^{2n} = \frac{2^{2n}-1}{3}A + \frac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se determine A^{-1} .

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și ecuația $x^3 - x + a = 0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 .

5p a) Să se calculeze $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)$.

5p b) Să se determine x_2 și x_3 știind că $x_1 = 2$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 8<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p c) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$.

2. Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ și $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător.

5p c) Să se arate că $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.