

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 78**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un paralelogram și P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.
- 5p** 6. Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 78**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}, m, n, p \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0, z_0, t_0) cu $z_0 = t_0 = 0$.

5p b) Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p c) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ sunt impare} \right\}$ și $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se definește legea de

compoziție $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

5p b) Să se calculeze $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 10)$.

5p c) Să se arate că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((q, k)) = q \cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2 \operatorname{arctg} f(x) - \pi)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.