

SUBIECTUL I (30p) Varianta 77

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație 2 și cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1 .
- 5p** 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$. Să se calculeze $f(-1) + f(-2) + f(-3) + \dots + f(-10)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 56$.
- 5p** 4. Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$.
Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 77**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m, \quad m \in \mathbb{R}. \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

5p a) Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p b) Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real și mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$.

5p a) Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p b) Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x - 6$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „*”.

1. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $xf(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .

5p b) Să se arate că funcția f este continuă în $x = 0$ dacă și numai dacă $f(0) = 1$.

5p c) Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x = 0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^2 ((x-1)(2-x))^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $2(2n+1)I_n = nI_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.