

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 76**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** 2. Se consideră ecuația $x^2 - 3x + 1 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{N}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Să se arate că oricare ar fi n natural, $n \geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^n = 2 \cdot C_{2n-1}^n$.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și A^* adjuncta sa.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .

5p b) Să se verifice că $\det(A^*) = (\det A)^2$.

5p c) Să se arate că matricea $A - I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a \in G$ se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = ax, \forall x \in G$.

5p a) Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a \in G$.

5p b) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{ab}, \forall a, b \in G$.

5p c) Fie $\mathcal{F}(G) = \{f_a : G \rightarrow G \mid a \in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

5p c) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul b).

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x + 1} dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine I_1 .

5p b) Să se arate că șirul I_n este strict descrescător.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t \in (-1, \infty)$).