

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se ordoneze crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}$, $b = \log_2 \frac{1}{16}$ și $c = -2$.
- 5p 2. Să se determine valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ se află situată deasupra axei Ox .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \left(\sqrt{x^2 + x - 2} \right) = 1$.
- 5p 4. Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 și punctele distincte $A, B, C \in d_1, M, N, P, Q \in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor șapte puncte date.
- 5p 5. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3; 2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1; -4)$ și $C(-5, -1)$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM = BC = 4$, unde M este mijlocul lui (BC) , iar $m(\sphericalangle AMC) = 150^\circ$.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B$, cu $x \in \mathbb{R}^*$.

5p a) Să se calculeze produsul AB .

5p b) Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p c) Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p b) Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a .

5p c) Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ și funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$.

5p

a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p

b) Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$.

5p

c) Să se demonstreze că $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$.

2. Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

5p

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p

b) Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

5p

c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x)dx$, este convergent.