

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 74**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 + 3z + 4 = 0$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2m + 2$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$.
- 5p** 4. Să se arate că $C_{a+b}^a = C_{a+b}^b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3, 3)$, $B(2, 4)$ și $C(2m, 1-m)$ să fie coliniare.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin \alpha$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det A$.

5p b) Să se verifice relația $A(A^2 + 6I_3) = O_3$.

5p c) Să se arate că $\det(I_3 + xA^2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{Z}$ și polinomul $p = X^3 + aX^2 + X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Știind că $a = b = 1$, să se afle rădăcinile polinomului p .

5p b) Să se determine a și b , știind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p c) În cazul $b = 1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină rațională.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$.

5p a) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

5p b) Să se studieze monotonia funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \int_1^2 \left(\frac{t}{x} - e^x\right)^2 dx$ și numerele $A = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$, $B = \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$.

5p a) Să se arate că $f(t) = At^2 - 2Bt + \frac{e^4 - e^2}{2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $f(2B - t) = f(2B + t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx\right)^2 \leq \left(\int_1^2 e^{2x} dx\right) \left(\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx\right)$.