

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 73**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $|5 - 12i| - |12 + 5i|$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x^4$. Să se calculeze $(f \circ f \circ f \circ f)(1)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 4^x = 20$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{0, 5, 10, \dots, 2010\}$, acesta să fie divizibil cu 25.
- 5p** 5. Se consideră un triunghi ABC , cu lungimile laturilor $AB = c$, $AC = b$ și un punct D astfel încât $\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC .
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 73**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x, y)$ punctul $A_M(x', y')$, unde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

5p a) Știind că $a=1, b=2, c=3, d=4$ și că $A(-1, 1)$, să se determine coordonatele punctului A_M .

5p b) Știind că $a=1, b=2, c=2, d=4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y=2x$.

5p c) Fie A, B, C trei puncte în plan. Dacă se notează cu S și S_M ariile triunghiurilor ABC , respectiv $A_M B_M C_M$, atunci $S_M = S \cdot |\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .

5p b) Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = X$, cu $X \in A$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^x$.

5p b) Să se determine valoarea numărului a știind că 3 este punct de extrem local al funcției f .

5p c) Să se determine valoarea numărului a știind că graficul funcției f are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se definește funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

5p a) Să se arate că $f_1^2(x) = 2 f_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$,
 $g(x) = f_1(x) \sin x$ în jurul axei Ox .