

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 72**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.
- 5p** 3. Să se determine imaginea funcției $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_{2009}^0 \cdot 5^{2009} - C_{2009}^1 \cdot 5^{2008} \cdot 4 + C_{2009}^2 \cdot 5^{2007} \cdot 4^2 - \dots - C_{2009}^{2009} \cdot 4^{2009}$.
- 5p** 5. Se consideră punctul $A(1, 2)$ și dreapta de ecuație $d : 4x - 2y + 5 = 0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d .
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se rezolve ecuația $\det(I_3 + xA^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2 = A$.

5p c) Să se arate că $\forall C \in M_3(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \det(C + xA)\det(C - xA) \leq (\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p = X^3 - X + m$ cu $m \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Știind că $m = -6$, să se determine x_1, x_2, x_3 .

5p b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

5p a) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

5p b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -1)$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numărul $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$.

5p b) Să se arate că $I_n \leq \ln 2$.

5p c) Să se arate că $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$.