

SUBIECTUL I (30p)**Variantă 71**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcția f este pară.
- 5p** 3. Să se arate că valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x^4$ este $f(0)$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente.
- 5p** 6. Să se determine ecuația medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC , știind că $A(2, 2)$ și ecuațiile medianelor duse din B și C sunt $2x + y - 2 = 0$, respectiv $x - y + 2 = 0$.

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5p

a) Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p

b) Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

5p

c) Să se arate că $D_n = n + 1$, $\forall n \geq 2$.

2. Un grup $(G, \cdot)$, cu elementul neutru e , are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

5p

a) Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p) .

5p

b) Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p) , atunci $(xy)^2 = x^2 y^2$, $\forall x, y \in G$.

5p

c) Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^2 t^x dt$.

5p a) Să se verifice că $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$.

5p c) Să se arate că există o funcție continuă $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $F(x) = 1 + \int_0^x f(y) dy$, $\forall x \in (-1, \infty)$.