

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 7**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{8+i}{7-4i}$.
- 5p** 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Se știe că, în triunghiul ABC , vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$ și sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases}.$$

5p a) Să se determine rangul matricei A .

5p b) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p c) Să se demonstreze că ecuația $XA = B$ nu are soluții $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, și pentru fiecare $t \in \mathbb{Z}$ notăm cu

$H_t = \{ A(kt - 1) \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Se admite faptul că $(G, \cdot)$ este un grup, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea matricelor.

5p a) Să se arate că $\forall n, p \in \mathbb{Z}, A(n) \cdot A(p) = A(n + p + 1)$.

5p b) Să se demonstreze că, pentru orice $t \in \mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G, \cdot)$.

5p c) Să se demonstreze că grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 7<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p b) Să se arate că, pentru orice $k > 0$, $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$.

5p c) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \operatorname{arctg} x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p a) Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se studieze monotonia funcției F , în cazul în care F este primitivă a funcției f .