

**SUBIECTUL I (30p)****Varianta 69**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine  $z \in \mathbb{C}$  știind că  $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$ .
- 5p** 2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50)$ .
- 5p** 3. Se consideră funcția  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = 3x + 1$ . Să se demonstreze că funcția  $f$  este neinvertibilă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din mulțimea  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , aceasta să verifice inegalitatea  $(x+1)! - x! \leq 100$ .
- 5p** 5. Să se arate că dreptele de ecuații  $d_1 : 2x - y + 1 = 0$  și  $d_2 : 2x + y - 1 = 0$  sunt simetrice față de axa  $Oy$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos \frac{7\pi}{12}$ .

**SUBIECTUL II (30p)****Varianta 69**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

5p a) Să se verifice relația  $A^3 - A = A^2 - I_3$ .

5p b) Să se arate că  $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

5p c) Să se arate că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , suma elementelor matricei  $A^n$  este  $n + 3$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se definește polinomul  $P_n = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ .

5p a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului  $P_4$ .

5p b) Să se descompună polinomul  $P_3$  în factori ireductibili în  $\mathbb{C}[X]$ .

5p c) Să se descompună polinomul  $P_6$  în factori ireductibili în  $\mathbb{R}[X]$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$ .

**5p**      a) Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  în origine.

**5p**      b) Să arate că, pentru orice  $k \in (0, \infty)$ , există  $c \in (k, k+1)$  astfel încât  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ .

**5p**      c) Să se demonstreze că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$ , este strict descrescător.

2. Fie funcția  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ .

**5p**      a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**5p**      b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$ , unde funcția  $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

**5p**      c) Să se arate, folosind eventual funcția  $f$ , că  $\int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{5}{12}$ .