

SUBIECTUL I (30p)**Varianța 68**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i}$ este întreg.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 2)x - 3$ să fie strict descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p** 5. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M și respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin \frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 68<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A .

5p a) Să se arate că $B^t = B$.

5p b) Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ și matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, și x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p a) Știind că $p = 1$ și $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3 .

5p b) Să se determine p și q știind că $x_1 = 1 + i$.

5p c) Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{2x+1}{2x+3}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

5p c) Să demonstreze că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

5p a) Să se arate că funcția f este impară.

5p b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 2$.