

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 67**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \dots$.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$, să fie strict crescătoare.
- 5p** 3. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea M a tuturor funcțiilor definite pe $A = \{1, 2, 3\}$ cu valori în $B = \{5, 6, 7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea M , aceasta să fie injectivă.
- 5p** 5. Se consideră punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC . Prin punctul G se duce paralela la AB care intersectează dreapta BC în punctul P . Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP} = m\overrightarrow{AB}$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos 2\alpha$, știind că $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + my + mz = -2 \end{cases}$, cu $m \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se arate că $\text{rang}(A) \neq 2$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se determine valorile întregi ale lui $m \neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4, \cdot)$.

5p a) Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.

5p b) Să se arate că $\alpha^4 = \beta^4$.

5p c) Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3 = \alpha^3 x$ în S_4 .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții

$$M = \{ f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă și } f(0) = 0, f'(0) = 1 \}.$$

5p

a) Să se arate că funcția $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = e^x \sin x$ aparține mulțimii M .

5p

b) Să se arate că, dacă $f \in M$ și $f(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p

c) Să demonstreze că, dacă $f \in M$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p

a) Să se arate că $g(x) = \ln(1+x)$.

5p

b) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p

c) Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.