

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 65**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \dots$.
- 5p** 2. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2\sin x$ este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 2.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: mx + 3y - 2 = 0$ și $d_2: 12x + 2y + 1 = 0$ sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Știind că $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin \alpha$.

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 3x - y - 2z = b \end{cases}, \text{ cu } a, b \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se determine a, b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.

5p b) Să se determine a, b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p c) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există $b \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .

5p b) Să se arate că, pentru orice $X \in A$, $X^2 = I_3$ sau $X^2 = O_3$.

5p c) Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2 = O_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$.

5p a) Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p b) Să se arate că $f(x) \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $f(x) \geq mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $m = 2$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x \cos x$ și F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p a) Să arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $4F(x) = \sin^4 x + c$.

5p b) Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5p c) Să se arate că $\int_0^\pi f^{2n+1}(x) dx = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.