

SUBIECTUL I (30p)**Variantă 64**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 + 2x + 1$ și $g(x) = x - 2009$.
Să se demonstreze că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) \geq 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în $(0, \pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- 5p** 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$ știind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: mx + (m+2)y - 1 = 0$ și $d_2: (m+2)x + 4my - 8 = 0$ sunt paralele.
- 5p** 6. Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$. Să se determine măsura unghiului C .

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 64**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AY = YA$, atunci $Y \in M$.

5p b) Să se arate că dacă $X \in M$ și $\det(X) = 0$, atunci $X = O_2$.

5p c) Să se arate că $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$.

5p a) Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului f .

5p b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$, unde $x_1, x_2, \dots, x_5$ sunt rădăcinile polinomului f .

5p c) Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

5p

a) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -2)$.

5p

b) Să calculeze limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$.

5p

c) Să se arate că există un punct $c \in (1, 2)$ astfel încât $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$.

2. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

5p

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p

b) Să se arate că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$.

5p

c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$.