

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 63**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \frac{4n}{n+3}$, este crescător.
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolilor $y = x^2 + x + 1$ și $y = -x^2 - 2x + 6$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- 5p** 4. Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(2x^2 - 5y)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx + 3y + 2 = 0$ și $d_2: 2x + y - 8 = 0$ să fie concurente.
- 5p** 6. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

SUBIECTUL II (30p) Varianta 63<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră mulțimile $P = \{S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid S^t = S\}$ și $Q = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$.

5p a) Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in P$ și $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in Q$.

5p b) Să se arate că, dacă $A, B \in Q$, atunci $AB \in P$.

5p c) Să se arate că $\det(X) \geq 0$, oricare ar fi $X \in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 45 \in \mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f} = X^3 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$.

5p a) Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p b) Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p c) Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

5p a) Să arate că $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$.

5p b) Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p c) Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} axe^x - x, & x \leq 0 \\ x \cos x + b, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se determine a și b știind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p b) Știind că $a = 0$ și $b = 0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.

5p c) Să se arate că, dacă $b = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} x^n f(x) dx = -\infty$.