

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 61**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine numărul real x știind că numerele $x+1$, $1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y = x^2 + 5x - 6$ cu axele de coordonate.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $2\sin x + 1 = 0$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M , aceasta să aibă 2 elemente.
- 5p** 5. Punctele A , B și G au vectorii de poziție $\vec{r}_A = 4\vec{i} + 7\vec{j}$, $\vec{r}_B = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r}_G = 4\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .
- 5p** 6. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ și măsura unghiului vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u})$.

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ M_{a,b} \mid M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se arate că $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{a+c,b+d}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p c) Să se calculeze, în funcție de a și b , rangul matricei $M_{a,b} - M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K, \cdot)$, unde $K = \{e, a, b, c\}$, e este elementul neutru și $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

5p a) Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3 = e$.

5p b) Să se arate că $ab = c$.

5p c) Să se arate că grupul $(K, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

5p c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.

5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) \cos x \, dx$.

5p c) Să se calculeze derivata funcției $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t) \, dt$.