

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 60**

<http://www.pro-matematica.ro>

5p 1. Să se arate că $2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8) < 3^9$.

5p 2. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2 + 5x - 7 = 0$. Să se arate că numărul $x_1^3 + x_2^3$ este întreg.

5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{5}{2}$.

5p 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2 = 3$.

5p 5. Se consideră punctele $A(2, 3)$ și $B(-3, -2)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului AB .

5p 6. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Știind că $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $|\vec{u}| = 2$ și $|\vec{v}| = 3$ să se calculeze $\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.

5p a) Să se calculeze $f(A)$.

5p b) Să se arate că $(f \circ f)(X) = O_2, \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p c) Să se arate că $f(X) + f(Y) \neq I_2, \forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră mulțimea $P = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AA^t = I_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A .

5p a) Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii P .

5p b) Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea P o structură de grup necomutativ.

5p c) Să se arate că, dacă $A, B \in P$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $AX = B$, atunci $X \in P$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

5p a) Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0, \infty)$.

5p b) Să se arate că, dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$, atunci $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că $g(x) < x$, pentru orice $x > 0$, unde g este funcția definită la punctul **b**).

2. Fie mulțimea $M = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$.

5p a) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ aparține mulțimii M .

5p b) Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui M , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $f \in M$, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0, 1)$.