

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 59**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+\dots+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,\dots,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4, dar să nu fie divizibil cu 8.
- 5p** 5. Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin^2 x$ știind că $\operatorname{ctg} x = 6$.

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \end{cases}, \text{ cu } m \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : mx + y + 1 = 0$, $d_2 : x + 3y + 2 = 0$, $d_3 : -x - y + 4 = 0$ sunt concurente.

2. Se consideră mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z}_5, m = \pm \hat{1} \right\}.$

5p a) Să se verifice că dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B \cdot A = A^{-1} \cdot B$.

5p b) Să se arate că H este un grup cu 10 elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

5p c) Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul H .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este inversabilă.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$ și F o primitivă a lui f .

5p a) Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

5p b) Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încât $\int_1^3 \frac{f(x)}{\sin x} dx = 2c^2$.

5p c) Să se arate că funcția F nu are limită la $+\infty$.