

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 58**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.
- 5p** 2. Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{1, 3, 5, \dots, 2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră dreapta $d : 2x + y - 1 = 0$ și punctul $A(3, 2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d .
- 5p** 6. Fie triunghiul ABC care are $AB = AC = 5$ și $BC = 6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC .

1. Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și funcția $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că dacă $\det A = 0$, atunci f este funcție constantă.

5p b) Să se arate că, dacă $\det A \neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p c) Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$.

5p a) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p b) Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p c) Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în G .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$.

5p b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \in [0, 1] \\ x \ln x, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

5p a) Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p b) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\int_1^x t \ln t \, dt}{x - 1}$.

5p c) Pentru $m = 1$, să se demonstreze că, pentru orice $t \in (0, 2)$ există $a, b \in [0, 2]$, $a \neq b$, astfel încât

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a) f(t).$$