

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 57**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ este natural.
- 5p** 2. Să se arate că $(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2x + 2) \geq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x + \log_2(4x) = 4$.
- 5p** 4. Să se determine termenul independent de x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x > 0$.
- 5p** 5. Se consideră dreapta $d: 4x - 8y + 1 = 0$ și punctul $A(2; 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d .
- 5p** 6. Triunghiul ABC are $AB = 2$, $AC = 4$ și $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din A .

SUBIECTUL II (30p) Varianta 57<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = 1, y_0 = 0$.

5p a) Să se determine x_1, x_2, y_1 și y_2 .

5p b) Să se arate că $x_n + y_n \sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

5p c) Să se arate că $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 0$.

2. Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ și $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

5p a) Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$.

5p b) Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$.

5p c) Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f : (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ cu $f(\bar{2}) = \hat{3}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$ are limită.

5p b) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} xf(x) & , x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & , x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x) \geq a + 2 \ln x$, $\forall x \in (0, \infty)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$.

5p c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) + f(x)$ are exact un punct de extrem local.