

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 56**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2\bar{z} + z = 3 + 4i$.
- 5p** 2. Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 3x + 1 = 0$, să se calculeze $x_1^3 + x_2^3$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 5^x - 2 \cdot 25^x = 0$.
- 5p** 4. Se consideră dezvoltarea $\left(a^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a \neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conține pe a^4 .
- 5p** 5. Să se calculeze $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$ știind că $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 și 12.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 56**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.

5p a) Să se arate că $f(A) = I_2$.

5p b) Să se arate că $f(X + f(X)) = X + f(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p c) Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

5p a) Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

5p b) Să se arate că $G = \{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

5p c) Să se determine elementele de ordin doi din grupul G , definit la punctul b).

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+5}{3x+4}$.

5p a) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p b) Să determine limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1)f(2)\dots f(n)$.

5p c) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(e^x)$.

2. Fie funcția $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x) dx$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

5p c) Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e f(x) dx = e$.