

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $[-\sqrt{8}] - \{-2, 8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}.$$
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.
- 5p** 5. Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.
- 5p** 6. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$, știind că $\operatorname{ctg} x = 3$.

SUBIECTUL II (30p)**Variantă 55**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$

5p a) Să se arate că $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2), \forall n \in \mathbb{N}.$

5p b) Să se arate că, dacă $a^2 + b^2 \leq 1$, atunci șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt mărginite.

5p c) Să se arate că, dacă $a = 1$ și $b = \sqrt{3}$, atunci $x_{n+6} = 64x_n, \forall n \geq 0.$

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot).$

5p a) Să se arate că ecuația $x^2 = \hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}.$

5p b) Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X].$

5p c) Să se arate că polinomul $X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X].$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1}$.

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p c) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .

2. Fie funcția $f : [1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p a) Să se determine o primitivă a funcției f .

5p b) Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt \leq \frac{x-1}{6}, \forall x \in [1, \infty)$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$.