

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 53**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $\left[\sqrt{2009} \right] + 3 \cdot \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
- 5p** 2. Să se determine imaginea intervalului $[2, 3]$ prin funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p** 5. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, r \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + r\vec{b}$.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5, 7 și 8.

1. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Se consideră matricele

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se arate că dacă $X, Y \in C(A)$, atunci $X + Y \in C(A)$.

5p b) Să se arate că dacă $E_1, E_2 \in C(A)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.

5p c) Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1, E_2, E_3, E_4 , atunci o conține și pe a patra.

2. Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5, \cdot)$.

5p a) Să se rezolve în S_5 ecuația $ax = b$.

5p b) Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5, \cdot)$.

5p c) Fie $k \in \mathbb{Z}$ cu $b^k = e$. Să se arate că 6 divide k .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$ și un număr real m din intervalul $(-2, \infty)$.

5p

a) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p

b) Să se demonstreze că ecuația $x^3 - 3x = m$ are soluție unică în mulțimea $(1, \infty)$.

5p

c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f^2(x)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$.

5p

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p

b) Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0) = -1$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.