

SUBIECTUL I (30p) Varianta 52

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ este constantă.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care parabola $y = x^2 - 2x + a - 1$ și dreapta $y = 2x + 3$ au două puncte distincte comune.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $(\sqrt{3} + 1)^9$.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} + 8\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-1)\vec{i} - 4\vec{j}$ să fie coliniari.
- 5p** 6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 5$, $BC = 7$ și $AC = 8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

1. Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine σ^{-1} .

5p b) Să se arate că permutările σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.

5p c) Să se arate că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are soluții în grupul $(S_6, \cdot)$.

2. Fie legea de compoziție „ $\circ$ ”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

5p a) Să se arate că $(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.

5p b) Să se demonstreze că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Știind că legea „ $\circ$ ” este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f este continuă pe $[0,1]$.

5p b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .

5p c) Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

2. Fie funcțiile $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$ și $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \arctg x$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor f și g și de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.