

**SUBIECTUL I (30p)****Varianța 51****<http://www.pro-matematica.ro>**

- 5p** 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii  $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$  știind că  $A = (-3; 4]$  și  $B = (1; 5]$ .
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreaptei  $y = 2x + 1$  cu parabola  $y = x^2 - x + 3$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$ .
- 5p** 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația  $2^{x!} \leq 2048$ .
- 5p** 5. Să se calculeze distanța de la punctul  $A(1;1)$  la dreapta  $d : 5x + 12y - 4 = 0$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\operatorname{tg}(a+b)$  știind că  $\operatorname{ctg} a = 2$  și  $\operatorname{ctg} b = 5$ .

1. Fie șirul  $(F_n)_{n \geq 0}$ , dat de  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_0 = 0, F_1 = 1$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

5p a) Să se verifice relația  $A^2 = A + I_2$ .

5p b) Să se arate că, dacă  $X \in M_2(\mathbb{Q})$ ,  $X \neq O_2$  și  $AX = XA$ , atunci  $X$  este inversabilă.

5p c) Să se arate că  $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

2. Fie  $\sigma, \pi \in S_5$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

5p a) Să se demonstreze că  $\sigma\pi \neq \pi\sigma$ .

5p b) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ .

5p c) Să se arate că  $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  este un subgrup al grupului  $(S_5, \cdot)$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare.

5p c) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.

2. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ .

5p a) Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția  $F$  să fie primitiva unei funcții  $f$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{1}{x F(x)} dx$ .

5p c) Să se arate că, pentru funcția  $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = (F(x) - 1) \sin x$ , are loc relația  $\int_1^\pi h(x) h''(x) dx \leq 0$ .