

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât numerele  $2^{a-1}$ ,  $2^{-a+2} + 1$ ,  $2^{a+1} + 1$  să fie în progresie aritmetică.
- 5p 2. Să se arate că vârful parabolei  $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , este situat pe dreapta de ecuație  $4x + 4y = 1$ .
- 5p 3. Să se arate că, dacă  $z$  este soluție a ecuației  $z^2 + 2z + 4 = 0$ , atunci  $z^2 - \frac{8}{z} = 0$ .
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea  $\{11, 12, \dots, 50\}$ , aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.
- 5p 5. Trapezul isoscel  $ABCD$  are bazele  $[AB]$  și  $[CD]$  și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ .
- 5p 6. Să se calculeze  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , știind că  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ .

**SUBIECTUL II (30p)****Varianta 50**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ , transpusa  $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ ,  $B = AA^t$ , și punctele  $P_k(a_k, b_k)$ , unde  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

5p a) Să se calculeze  $B$  știind că  $P_1(1, 2)$ ,  $P_2(2, 4)$ ,  $P_3(-3, -6)$ .

5p b) Să se arate că  $\det(B) \geq 0$ , oricare ar fi punctele  $P_1, P_2, P_3$ .

5p c) Să se arate că  $\det(B) = 0$  dacă și numai dacă punctele  $P_1, P_2, P_3$  sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ .

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $M$ .

5p b) Să se arate că  $AB \in M$ , pentru orice  $A, B \in M$ .

5p c) Să se arate că  $(M, \cdot)$  este un grup, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea matricelor.

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

5p b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției  $f$  către  $+\infty$ .

2. Fie șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se calculeze  $I_2$ .

5p b) Să se demonstreze că  $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Să se demonstreze că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definit prin  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , are limita 0.