

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p** 5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.
- 5p** 6. Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 2x$.

1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$, sistemul
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$$
 și A matricea sa.

5p a) Să se arate că $\det A \neq 0$.

5p b) Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p c) Să se determine inversa matricei A .

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de relația $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = (5, \infty)$.

5p a) Să se arate că legea "*" are element neutru.

5p b) Să se demonstreze că G este grup abelian în raport cu legea "*".

5p c) Să se rezolve în grupul $(G, *)$ sistemul
$$\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$$

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4-3x^2}{x^3}$.

5p a) Să se demonstreze că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

5p c) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arccos f(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ și $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

5p c) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, graficul funcției F și axa Ox .