

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 48**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine partea reală a numărului complex $(\sqrt{3} + i)^6$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f \circ f)(512)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x + \sin x = 0$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a, b, c) cu proprietatea că $a, b, c \in M$ și $a < b < c$.
- 5p** 5. Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x + 2y = 6$ și $2x + 4y = 11$.
- 5p** 6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB = 1$, $BC = 2$ și $m(\sphericalangle BAD) = 60^\circ$. Să se calculeze produsul

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 48**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 7x - y + az = b \end{cases},$$
 unde a și b sunt parametri reali.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

5p b) Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

5p c) Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor a și b pentru care sistemul admite o soluție (x, y, z) , cu x, y, z în progresie aritmetică.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$

5p a) Să se arate că $X(t) \cdot X(u) = X(t+u), \forall t, u \in \mathbb{R}.$

5p b) Să se determine $t \in \mathbb{R}$ știind că $X(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$

5p c) Să se arate că mulțimea G formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5p b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .

5p c) Să se demonstreze că funcția f are două puncte de extrem.

2. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

5p b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.