

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 47**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(2+i)^4 + (2-i)^4$ este întreg.
- 5p** 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y = 2x + 1$ și parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + \sqrt{16 + x^2} = 11$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ și $C(3, 2)$. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se determine ecuația dreptei OG .
- 5p** 6. Să se arate că $2 \cdot (\cos 75^\circ + \cos 15^\circ) = \sqrt{6}$.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(X) = AX - XA.$$

5p a) Să se determine rangul matricei A .

5p b) Să se calculeze $f(B)$.

5p c) Să se arate că ecuația $f(X) = B$ nu are soluții.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + a^2X - a$, $g = aX^3 - a^2X^2 - 1$, cu $a \in \mathbb{R}^*$ și $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f .

5p a) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p b) Să se arate că rădăcinile polinomului g sunt inversele rădăcinilor polinomului f .

5p c) Să se arate că polinoamele f și g nu au rădăcini reale comune.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$.

5p b) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f admite un singur punct de extrem local.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \frac{9}{10}$.