

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 46**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.
- 5p** 2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \rightarrow B$, cu proprietatea că $f(3) = 1$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ și $P(0, 3)$.
Să se determine coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea medianei duse din A în triunghiul ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se demonstreze că $\forall x \in \mathbb{R}, \det(A - xI_2) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$.

5p b) Dacă $A^2 = O_2$, să se demonstreze că $a + d = 0$.

5p c) Știind că $A^2 = O_2$, să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1\}$ și operația

$$(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc).$$

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $(a, 15) \in G$.

5p b) Să se arate că, pentru orice $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) * (c, d) \in G$.

5p c) Să se arate că $(G, *)$ este grup.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$.

5p a) Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))$.

2. Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$.

5p a) Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx \sin x$ să fie o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și graficul funcției $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(x) = \pi x - x^2$.