

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 45**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.
- 5p** 2. Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2 + x - 1 = 0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{Z}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x + 3^{1-x} = 7$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f : A \rightarrow B$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ și $C(-3, -1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A în triunghiul ABC .
- 5p** 6. Să arate că $2 \cdot (\sin 75^\circ - \sin 15^\circ) = \sqrt{2}$.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX \right\}$.

5p a) Să se arate că $B \in C(A)$.

5p b) Să se arate că dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X + X^2 = A$.

2. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ și corespondența

$$(x, y) \rightarrow x * y, \text{ unde } x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G.$$

5p a) Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe G .

5p b) Să se arate că $\forall x, y \in G, f(x * y) = f(x)f(y)$.

5p c) Știind că operația "*" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Știind că $a = 0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se determine toate numerele reale a astfel încât funcția f să aibă trei puncte de extrem local.

2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 x \sqrt{1 - x^2} dx$.

5p b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$.